Formelsammlung Wirtschaftsmathematik

**Teilbarkeitsregeln**

 (von hinten nach vorne paarweise addieren)

**7**: Dann teilbar, wenn auch jene Zahl durch 7 teilbar ist, die entsteht, wenn man das Doppelte der letzten Ziffer von der überbleibenden Zahl subtrahiert. (Tipp: So lange wiederholen, bis eine möglichst kleine Zahl entsteht)

**schnelle Multiplikation**

Wenn eine der Zahlen gerade ist: Gerade Zahl halbieren, andere Zahl verdoppeln (mehrfach möglich).

4: Zuerst mit 2 multiplizieren, nochmal mit 2 multiplizieren und zusammenzählen.

5: mit 2 multiplizieren und das Komma um eine Stelle verschieben *oder*

dividiere die zu multiplizierende Zahl durch 2. Ist das Ergebnis eine ganze Zahl, füge noch eine 0 ans Ende dazu. Bei einem Ergebnis mit min. einer Zahl hinter dem Komma, entferne die Zahlen hinter dem Komma und füge dann eine 5 dazu.

6: Multipliziere mit 3 und dann mit 2.
9: Multipliziere mit 10 und ziehe die ursprüngliche Zahl ab.

11: Die ursprüngliche Zahl um eine 0 erweitern und dann die ursprüngliche Zahl addieren.
12: Multipliziere mit 10 und addiere die ursprüngliche Zahl 2 mal.
14: Multipliziere mit 7 und dann mit 2
19: Multipliziere mit 20 und ziehe die ursprüngliche Zahl ab.
90: Multipliziere mit 9 und füge eine 0 an die letzte Stelle.

**Primzahlen**

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83 …

**Zahlenbereiche**

**pq-Formel**

Voraussetzung: x²+px+q = 0

**Mitternachtsformel**



Voraussetzung: ax² + bx + c = 0

**Brüche umrechnen**

Bruch in Dezimalzahl: Teilen (Teilbarkeitsregeln, schriftliche Division: Komma vorher auf beiden Seiten verschieben)

Dezimalzahl in Bruch: Umschreiben und dann kürzen

 periodische Dezimalzahl: Bei 0 und dann Periode direkt hinter Komma: Periode in Zähler übernehmen, Nennen sind Neunen (Anzahl wie Stellen der Periode)

Ergebnis: danach kürzen

**Binomische Formeln**

(a – b) \* (a + b) = a² – b² (a – b)³ = a³ – 3a² b + 3ab² – b³

(a - b)² **=** (b - a)² jedoch (a - b) != (b - a)

**Winkelfunktionen**

**Potenzen**

**Potenzgesetze:** **Wurzelgesetze:**

(1) (1)

(2) (2)

(3) (3)

(4) (4)

(5) (5)

(6)  (6) 

 (7)

 Wurzel ziehen: 2 Fälle (pos./neg. Wert)

**Summen und Produkte**

ohne Exponenten:

mit Exponenten:

Produkt:

Mit n = Endwert und i = Startwert

**Logarithmus**

nur für pos. Werte definiert (daher Def.-bereich angeben und Probe rechnen)

Transformationsregel: Der Logarithmus ist der Exponent, die Basis bleibt die Basis!

 (wie oft a mit sich selbst multiplizieren für Zahl b?) <=>

 loge 🡪 ln

Log auflösen (erheben):

Voraussetzung: Beide Logs haben gleiche Basis

 =

**Ungleichungen**

 (gleich) (a größer) (a kleiner)

Bei Multiplikation und Division mit negativen Zahlen wird das Zeichen umgedreht!

Wenn durch Term mit **x** multipl./divid. wird, 2 Fälle ausrechnen.

**Beträge**

2-mal Betrag in Gleichung:

1. Fall

2. Fall

3. Fall

**Menge**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Schnittmenge |
|  | alles gemeinsam |
|  | Wie viele Zahlen es insgesamt gibt |
|  | Komplement/Gegenteil in Ω |
|  |  |
|  | A ohne B |
| **:** | Für die gilt… |

Grundmenge **Ω**

Teilmenge **⊂**

Einschränkung der Grundmenge { x ∊ Ω | a < x ≤ b }

Intervalle:





Hauskredit:

Sparvertrag:

**Tilgungsplan:**

Zinsen: Restschuld Beginn \* Prozentsatz

Tilgung: Annuität – Zinsen

Restschuld: Restschuld Jahresbeginn – berechnete Tilgung

Tabelle:

Periode (1-n) | Restschuld Jahresbeginn | Annuität | Zinsen | Tilgung | Restschuld Jahresende

(Sämtliche Nebenrechnungen angeben)

**kgV, größter gemeinsamer Teiler (euklidischer Algorithmus)**

kgV(a,b) \* ggT(a,b) = a\*b (wahre Aussage)

alternativ: Primfaktorzerlegung

* Anwendung bei großem wdh. bis

Zahlenabstand 🡪 ggT(a,b) = d

* Primfaktoren berechnen,

die gemeinsamen Zahlen

multiplizieren

**Gauß-Algorithmus**

Vor Beginn Zeilen vereinfachen (teilen)

Wenn Diagonale (nach Berechnung) nur aus Nullen besteht oder für alle x = 0 rauskommt, ist LGS nicht lösbar.

Lösungsmenge angeben:

**Fakultät und Permutationen**

 🡪 0! = 1

Binomialkoeffizient:

binomischer Satz:

**Vektoren**

 Bei Vorfaktor gilt Vorzeichen nur für Vektor (addieren!).

Länge/Betrag des Vektors:

Abstand zweier Punkte:  dann 

Vektor von Punkt (Länge vorgegeben):

Entgegengesetzte Richtung: Alle Vorzeichen umkehren

Zwei Punkte mit Vektor verbinden: Punkt 1 – Punkt 2

Projektion von Vektor: 

Skalarprodukt: = Zahl

Winkel:

orthogonal/senkrecht 🡪 Skalarprodukt = 0

orthogonales System: Alle Vektoren sind normiert, Skalarprodukt der Vektoren zueinand. ist 0

Einheitsvektor/normieren: <=>  (Ergebnis multiplizieren, um Länge von Vektor festzulegen)

Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen:

Punkt, welcher Strecke teilt:

Dreieck: Flächeninhalt A = (Kreuzprodukt nutzen, danach ggf. Zahl aus Vektor ausklammern; die ½ mit ggf. ausgekl. Wert und Länge multipl.)

Höhenfußpunkt: Dreieck mittels Projektion teilen

rechten Winkel nachweisen.: Skalarprodukt aller Seiten berechnen,

wenn dies 0 ist, dann ist ein rechter Winkel vorhanden

**Matrix**

Regeln:

Addition/Subtraktion: [nur bei gleichen Matrizen]

Zahl für Zahl berechnen =>

Multiplikation: [nur, wenn Spalte gleich Zeile (ggf. Transponieren) 2x3 \* 3x2 = 2x2]

Falksches Schema: 

mit Vektor: 

reelle Zahl \* Matrix:

Transponierte Matrix – Spalten und Zeilen werden vertauscht:

Einheitsmatrix: =

Inverse Matrix:

 es gilt

Umstellung +, - , / , \* mit anderen Zeilen, Vorzeichen vertauschen möglich

Berechnung mit Determinante:



^^transponieren

Inverse bei 2x2-Matrix: Formel: 

Determinante (Invertierbarkeit testen):

  (Invertierbar wenn != 0)

**Lineare Optimierung: *Simplex-Algorithmus***

(Umformen der Zielfunktion:

Nebenbedingungen aufschreiben:

Simplex-Tableau

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x1 | x2 |  |  |  |
|  | c | d | 1 | 0 | e |
|  | e | f | 0 | 1 | f |
|  | a | b | 0 | 0 | Z |

1. Auswahl der Pivot-Spalte: größte Zahl unten (hier: a)

2. Ergebnisspalte durch die Zahlen der Pivot-Spalte teilen. Die kleinste errechnete Zahl gibt die Pivot-Zeile vor (hier e/c). (Achtung: 0 oder negative Zahl in der Pivot-Spalte, keine Berechnung)

3. „Gauß-Schritt“: (multiplizierte) Pivot-Zeile abziehen von der (multiplizierten) vorhergehenden oder folgenden Zeile. Alle Zahlen in Spalte (außer Pivot-Element) müssen 0 werden.

4. Tableau mit neuen Zeilen darunter erweitern, von vorne beginnen

5. Solange, bis in der letzten Zeile keine positive Zahl mehr steht

6. u1, u2… wegstreichen, Funktionen x1,2, … berechnen (hier: c\* x1 = e, e durch c teilen)

7. Z ablesen und komplette Ergebnisfunktion mit x1,2, … aufstellen

8. Lösung angeben: Z = … für (x1, x2) = (..., …)

***grafische Lösung***

1. alle Restriktionen aufschreiben
2. Nacheinander die und Werte der Bedingungen 0 setzen, umstellen
	1. Linien einzeichnen (mit beiden Werten)
3. maximalen Wert für x und y (innerh. der Restriktionen) ablesen
4. In gegebene Zielfunktion einsetzen, Z berechnen

Je nach Aufgabe muss noch die Zielfunktion eingezeichnet und ggf. verschoben werden.

**Funktionen (Analysis)**



**Lineare Funktion aus zwei Punkten berechnen**

1. jew. die Punkte in **y** = m**x** + b einsetzen
2. eine Gleichung nach m umstellen, in zweite Gleichung einsetzen
3. zu b umstellen, b in eine der Gleichungen einsetzen
4. zu m umstellen
5. Ergebnis: f(x) = **m** x + **b**



|  |  |
| --- | --- |
| Gebrochen rationale Funktionen |  |

 Defintionslücken gebr. ration. Fkt.:

(x) = 0 wird (Nullstellenform).

 *Hebbare Defintionslücke:* Nullstellen Zähler und Nenner faktorisieren; wenn oben und unten zwei gleiche Nullstellen, ist Definitionslücke hebbar.

Polstellen/Nullstellen (nur bei gebr. ration. Fkt.):

1. Fall: a ist nur oben im Zähler 🡪 Nullstelle der f(x)

2. Fall: a ist nur unten im Nenner 🡪 a ist Pol von f

3. Fall:

d ist die Nullstelle

Wenn a > 0 dann nach oben geöffnet, sonst nach unten



Ausmulitplizieren für die Normalenform (3. Binom. Formel nutzen)

Gleichung in faktorisierte Form bringen:

* ausklammern
* ggf. pq-Formel nutzen oder Nullstellen berechnen (Polynomdivision)
* ausgeklammerten Faktor schreiben (hier c), so viele Klammern wie Nullstellen mit getauschtem Vorzeichen schreiben, danach folgt (nullstellenlose) Rest



* Bonus: Die Faktoren als Primzahlen schreiben
* Ziel: Zahlen sind Primzahlen, x hat nur als Potenz

Scheitelpunktform:  Scheitelpunkt:  (Hoch- o. Tiefp.)

 *Scheitelpunkt berechnen:*

1. Funktion ableiten
2. x-Koordinate des Scheitelpunktes berechnen durch Nullsetzen der 1. Ableitung
3. y-Koordinate des Scheitelpunktes berechnen durch Einsetzen des x-Wertes in f(x)

Umkehrfunktion: (Funktion nach x umstellen, x und y einfach tauschen)

**1. Definitionsbereich**

Alle Zahlen, welche für x verwendet werden können. Wenn kein Bruch/Wurzel:

Definitionslücken:

 *Bruch* => Bereiche ausschließen (Nenner darf nicht 0 werden); bei x**²** zwei Zahlen!

 *Wurzel*:  Wenn Wurzelexponent ungerade, sind alle reellen Zahlen erlaubt, bei auch neg. Werte erlaubt.

 Zahlen ausschließen:

**1.1 Wertebereich**

ist Bereich, den der y-Wert annehmen kann, also f(x)

Bestimmung: Alle möglichen x-Werte einsetzen, Menge der erhaltenen y-Werte angeben.

 *lineare Funktion*: , außer wenn Def.-B. vorgegeben. Dann einsetzen.

 *quadratische Funktion:* (s.o.)

**2. Symmetrie**

Testen (beliebigen Wert einsetzen):

 🡪 **achsen**symmetrisch

 🡪 **punkt**symmetrisch

**3. Nullstellen** (Berührung x-Achse)

Max. so viele Nullstellen, wie höchster Grad.

Satz von Vieta: ganzzahlige Nullstellen sind immer Teiler von (letzte Zahl, absolutes Glied).

Definitionsbereich beachten!

Beim Einsetzen in *f = (x + b) (x - b)* die Vorzeichen der Werte ändern!

* Funktion gleich null setzen und nach x auflösen (pq oder quadrat. Ergänz.)

Wenn x(a+b) vorkommt, ist 0 eine Nullstelle

* quadrat. Ergänzung: Funktion = 0 setzen, Vereinfachen (ausklammern), Konstante rüber,  ergänzen (beide Seiten), ausr., weiter vereinfachen
* Nullstellen via Polynomdiv.: Erste Nullstelle raten (1,2,3 testen, so dass = 0),

Polynom durch (**x-**Nullstelle) teilen, Ergebnis = 0 setzen

* Horner-Schema (siehe Punkt 9.4 S. 11)
* Satz von Vieta

|  |  |
| --- | --- |
| x² + p ⋅ x + q = 0x1 ⋅ x2 = qx1 + x2= −p | 1. Normalenform (x² + px + q = 0)
2. Teiler von q suchen, also Faktoren bestimmen, die x1 ⋅ x2 = q erfüllen
3. Faktoren bestimmen, die gleichzeitig auch

x1 + x2 = − p erfüllen |

* Nullproduktsatz (faktorisierte Form, für jedes x nacheinander 0 f

**3.2 Substitutionsverfahren**

Bei ähnlichem Funktionsaufbau wie Standardform (pq), jedoch höherem Grad:

Z = => quadratische Gl. lösen (mit eingesetztem Z, also Exponent max. ^2; z. B. pq Formel anwenden), statt Z die berechneten Zahlen einsetzen und lösen

**4. Auf-/Ableitungsregeln**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**4.1 Tangentengleichung aufstellen**

a wird gegeben, einsetzen und ausrechnen

Endform: g(x) = ax

**5. Monotonie**

f´ und Nullstellen der 2. Ableitung (also Extremstellen) ausrechnen. Dann Nullstellen von f´ in f´´ einsetzen.

Wert von f´´ *positiv* = Tiefpunkt (links davon fallend, rechts davon steigend)

Wert von f´´ *negativ* = Hochpunkt (links davon steigend, rechts davon fallend)

Wert von f´´ *null* = in f´´´ einsetzen, wenn 0 dann keine Aussage möglich. Sonst Terassenpunkt (links und rechts davon gleiche Monotonie).

Intervall angeben:  ∞

Punkt berechnen: x in Ausgangsfunktion einsetzen für y-Wert

**Wendepunkt**

f´´(x) = 0 setzen, x-Wert für Wendepunkt erhalten

Wenn f´´´(Ergebnis) dann Wendepunkt ok

)

**6. Inverse Funktion**

f-1 🡪f(x) muss dafür bijektiv (umkehrbar) sein: f(x1) = f(x2) => x1 = x2

f(x) nach x auflösen (f-1 = …)

**8. Asymptote**

(vollständig ausmulitplizierte) Ursprungsfunktion nutzen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Typ  | Voraussetzung | Berechnung Asymptote |
| [senkrechte Asymptote](https://www.mathebibel.de/senkrechte-asymptote) | Nullstelle des Nenners(die Definitionslücke) | Nenner 0 setzen, der Rest ist die Geradengleichung |
| [waagrechte Asymptote](https://www.mathebibel.de/waagrechte-asymptote) | gr. Zählergrad = gr. Nennergrad(kann jew. auch 0 sein) |  a(n)/b(n) ist Koeffizient der höchsten Potenz (Zähler/Nenner) |
|  | gr. Zählergrad < gr. Nennergrad | x-Achse (y = 0) ist Asymptote |
| schiefe Asymptote | gr. Zählergrad = gr. Nennergrad + 1 | Polynomdivision durchführen, für x **∞** einsetzen, der Rest ist gesuchte Gleichung |
| asymptotische Kurve | gr. Zählergrad > gr. Nennergrad + 1 |  |

Antwort: Graph nährt sich für  asymtotisch der (…) Geraden y = … an.

**9.1 Polynom**

Geradenform (Polynom 1. Grades):

Steigung:

**9.2 Polynomdivision (z. B. für Nullstellen)**

Vorbereitung: Polynome nach fallenden Potenzen ordnen (bei – Vorzeichen tauschen)

Teilen durch **(**x **–** [geratene] Nullstelle**)** oder durch Polynom Nenner

*Tipps:* bei fehlenden Exponenten 0 schreiben; wenn nicht abziehbar, beide Werte (mit -) mitnehmen, ordnen; größerer Vorfaktor durch behebbar, Vorfaktor durch entfernbar

Ergebnis +

**9.3 Polynom vereinfachen**

Bei Standardform (x² + ax + b = 0) pq-Formel anwenden, ansonsten Substitutionsverfahren, quadrat. Ergänzung, Faktorisieren (gemeins. Zahl ausklammern) oder binomische Formeln. Dann sind ggf. weitere Schritte möglich.

**9.4 Horner-Schema (für Nullstellen, Polynomdivision, Ableitungen)**

Voraussetzung: Polynom geordnet und möglichst vereinfacht, alle Grade von 0 bis n (max Grad) müssen vorhanden sein (ggf. fehlende hinzufügen mit Koeffizient 0).

1. geg. Koeffizienten in erste Zeile übernehmen

2. erste Nullstelle selbst herausfinden (Bedingung: f(b) = 0)

3. ersten Wert nach unten übernehmen

4. Nullstelle mit diesem Wert multiplizieren, oben hinschreiben

5. Zeile zusammenaddieren

6.1 alle Zahlen berechnen

6.2 Polynom in unterer Zeile ablesen

7. Polynom gleich 0 setzen (dann pq-Formel etc.)

8. ggf. mit berechneten Werten weitermachen (wenn letzte Zahl = 0, dann geratene Nullstelle korrekt => Weiterrechnen erlaubt)

8. Lösung angeben: oder Polynomgleichung: f(x) = (Rest) (x – Nullstelle)

**10. Extremstellen**

f´ (x) = 0 (Nullstelle der 1. Ableitung) ist die Extremstelle (x-Wert).

Wenn f´´ existiert, weitere Bestimmung:

f´´ (x) > 0 lokales Minimum

f´´ (x) < 0 lokales Maximum

f´´(x) = 0 keine Extremstelle, sondern Wende-/Sattelpunkt

Bestimmung Extremstellen mittels Monotonieverhalten:

letzte nicht verschwindende Ableitung von gerader Ordnung (4.,6.,8…) => **lokale Extremstelle**

letzte nicht verschwindende Ableitung von gerader Ordnung **und** positiv => **lokales Minimum**

letzte nicht verschwindende Ableitung von gerader Ordnung **und** negativ => **lokales Maximum**

letzte nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung => **Sattelpunkt** (Sonderfall von Wendepunkt; ist kein Extrempunkt, sondern waagerechte „Treppenstufe“)

**11. Grenzwert**

Verhalten von |x| -> ∞ ist wie das Verhalten von (Leitterm)

**12 Funktionen mit zwei Variablen**

1. Partielle Ableitungen (anderer Wert bleibt unverändert, wenn dieser nicht alleine steht)

2. Partielle Ableitungen

**12.2 Extremstellen zwei Variablen**

(1) 1. Partiellen Ableitungen nullsetzen und nach x/y umstellen.

(2) hier x und y dann einsetzen

(3)

Extremstellen mit Nebenbedingungen (Es gibt eine zweite Funktion g(x))

**Lagrangesche Regeln**

(1) Umstellen von 1. und 2. nach oder e

(2) Gleichsetzen und nach x oder y auflösen.

(3) Einsetzen in 3.

(4) Nach fehlender Konstante auflösen.

(5) Nachbarpunkt finden, indem man sich Zahl für x ausdenkt und diese in g(x) einsetzt.

(6) Anschließend Punkte in f(x) einsetzen und ausrechnen. Wenn der Nachbarpunkt größer ist 🡪Minimum. Wenn der Nachbarpunkt kleiner ist 🡪 Maximum.

**Integrale**

Achtung: Nullstellen beachten, da sonst möglicherweise der Flächeninhalt unterhalb der X-Achse subtrahiert wird!

**Folgen**

* arithmetische Folgen (Änderung, um gleiche Addition/Subtraktion)
* geometrische Folgen (Änderung, um gleiche Multiplikation)
* harmonische Folgen (Änderung um 1)
* alternierend (positiv, negativ, positiv, negativ)

Nullfolge 🡪 Grenzwert geht gegen null

Grenzwertbestimmung durch ausklammern von „n“ bei Brüchen

**Reihen**

sind Summenfolgen.

Geometrische Summenformel: bei nicht Exponenten: