Formelsammlung Wirtschaftsmathematik

Teilbarkeitsregeln

teilbar durch 2	letzte Ziffer gerade
teilbar durch 3	Quersumme durch 3 teilbar
teilbar durch 4	letzte zwei Ziffern bilden eine Zahl, die durch 4 teilbar ist
teilbar durch 5	letzte Ziffer 0 oder 5
teilbar durch 9	Quersumme durch 9 teilbar
teilbar durch 10	letzte Ziffer ist 0
teilbar durch 11	Paarquersumme durch 11 teilbar

(von hinten nach vorne paarweise addieren)

7: Dann teilbar, wenn auch jene Zahl durch 7 teilbar ist, die entsteht, wenn man das Doppelte der letzten Ziffer von der überbleibenden Zahl subtrahiert. (Tipp: So lange wiederholen, bis eine möglichst kleine Zahl entsteht)

schnelle Multiplikation

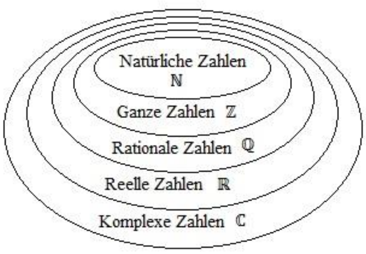
Wenn eine der Zahlen gerade ist: Gerade Zahl halbieren, andere Zahl verdoppeln (mehrfach möglich).

4: Zuerst mit 2 multiplizieren, nochmal mit 2 multiplizieren und zusammenzählen.
5: mit 2 multiplizieren und das Komma um eine Stelle verschieben *oder*
dividiere die zu multiplizierende Zahl durch 2. Ist das Ergebnis eine ganze Zahl, füge noch eine 0 ans Ende dazu. Bei einem Ergebnis mit min. einer Zahl hinter dem Komma, entferne die Zahlen hinter dem Komma und füge dann eine 5 dazu.
6: Multipliziere mit 3 und dann mit 2.
9: Multipliziere mit 10 und ziehe die ursprüngliche Zahl ab.
11: Die ursprüngliche Zahl um eine 0 erweitern und dann die ursprüngliche Zahl addieren.
12: Multipliziere mit 10 und addiere die ursprüngliche Zahl 2 mal.
14: Multipliziere mit 7 und dann mit 2
19: Multipliziere mit 20 und ziehe die ursprüngliche Zahl ab.
90: Multipliziere mit 9 und füge eine 0 an die letzte Stelle.

Primzahlen

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83 …

Zahlenbereiche



pq-Formel

Voraussetzung: $x^2+px+q = 0$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

Mitternachtsformel

Voraussetzung: $ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

Brüche umrechnen

Bruch in Dezimalzahl: Teilen (Teilbarkeitsregeln, schriftliche Division: Komma vorher auf beiden Seiten verschieben)

Dezimalzahl in Bruch: Umschreiben und dann kürzen

periodische Dezimalzahl: Bei 0 und dann Periode direkt hinter Komma: Periode in Zähler übernehmen, Nennen sind Neunen (Anzahl wie Stellen der Periode)

$$\frac{Periode\ nach\ Komma\ (verschoben)\quad Orginalzahl}{Substraktion\ (Z.\ 1)} \quad \frac{Zahl, mit\ der\ mulitpl.\ wurde\quad 1}{Substr.\ (Z.\ 2)}$$

Ergebnis: $\frac{1.\ Zahl\ ohne\ Komma}{2.\ Zahl\ mit\ versch.\ Komma\ (Nullen\ anhängen)}$, danach kürzen

Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(a – b) * (a + b) = $a^2 - b^2$

(a – b)^3 = $a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b) * (a-b) = a^2 - b^2$

(a - b)² **=** (b - a)² jedoch (a - b) != (b - a)

$(a+b) * (a+b) = a^2 + b^2$

Winkelfunktionen

α	30°	45°	60°
sin(α)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cos(α)	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
tan(α)	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

Potenzen

$a^1 = a$ $\quad (\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$

$a^0 = 1$ $\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a*d}{b*c}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Potenzgesetze:

(1) $a^n * a^m = a^{n+m}$

(2) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

(3) $(a^n)^m = a^{n*m}$

(4)$a^n * b^n = (a*b)^n$

(5)$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

(6) $ax^n + bx^n = (a+b)x^n$
$ax^n - bx^n = (a-b)x^n$

Wurzelgesetze:

(1) $\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a*b}$

(2) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

(3) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

(4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n*m]{a}$

(5) $\sqrt[r*n]{a^{m*r}} = \sqrt[n]{a^m}$

(6) $a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x} = (a+b)\sqrt[n]{x}$

(7) $x^{0,5} = \sqrt{x}$

Wurzel ziehen: 2 Fälle (pos./neg. Wert)

Summen und Produkte

ohne Exponenten: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

mit Exponenten: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Produkt:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 * x_2 * \ldots * x_{n-1} * x_n$$

Mit n = Endwert und i = Startwert

Logarithmus

nur für pos. Werte definiert (daher Def.-bereich angeben ($\mathbb{R}^+$) und Probe rechnen)

Transformationsregel: Der Logarithmus ist der Exponent, die Basis bleibt die Basis!
$a^x = b$ (wie oft a mit sich selbst multiplizieren für Zahl b?) <=> $x = \log_a b$

$\log_a(a) = 1$ $\log_a a^x = x$ $log_b c = \frac{log_a c}{log_a b}$

$\log_a 1 = 0$ $\log_a b * \log_b a = 1$

$a^{\log_a b} = b$ $\log_e \rightarrow \ln$

$\log_x(a * b) = \log_x(a) + \log_x(b)$

$\log_x(\frac{a}{b}) = \log_x(a) - \log_x(b)$ $x = log_a\left(\frac{1}{b}\right) => a^x = b^{-1}$

$\log(a^x) = x * \log(a)$

$\log(\frac{a}{b}) = -\log(\frac{b}{a})$

<u>Log auflösen (erheben):</u>

Voraussetzung: Beide Logs haben gleiche Basis

$log_y(x + y) = b \quad |y^{(\ldots)}$

$y^{log_y(x+y)} = y^b$

$(x + y) = y^b$

Ungleichungen

$a = b$ (gleich) $a > b$ (a größer) $a < b$ (a kleiner)

Bei Multiplikation und Division mit negativen Zahlen wird das Zeichen umgedreht!

Wenn durch Term mit **x** multipl./divid. wird, 2 Fälle ausrechnen.

Beträge

$|x| = \begin{cases} x \; falls \; x \geq 0 \\ -x \; falls \; x < 0 \end{cases}$

2-mal Betrag in Gleichung:
1. Fall $x \leq ?$
2. Fall $? < x < ?$
3. Fall $x \geq ?$

Menge

Grundmenge **Ω**

Teilmenge ⊂

Einschränkung der Grundmenge { x ∈ Ω | a < x ≤ b }

Intervalle:

≤]	> (
≥ [	<)

$\boldsymbol{A \cap B}$	Schnittmenge
$\boldsymbol{A \cup B}$	alles gemeinsam
$\boldsymbol{\lvert A \rvert}$	Wie viele Zahlen es insgesamt gibt
$\boldsymbol{\bar{A}}$	Komplement/Gegenteil in Ω
$\boldsymbol{\overline{A \cup B}}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$
$\boldsymbol{A \backslash B}$	A ohne B
:	Für die gilt…

Zinsen

ohne Zinseszins

$Z_t = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot t$

Endwert gesucht

$C = S \cdot (1+r)^n$

Anfangswert * (Prozentsatz)^Anzahl Jahre

C	Endwert
S	Barwert
r	Zinssatz (z.B. 0,005)
n	Laufzeit, also Anzahl Durchführungen (meist Jahre)

Zinsfaktor gesucht

$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$

Laufzeit gesucht

$n = \frac{\log\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\log(q)}$

Barwert gesucht (Abzinsen/Diskontieren)

$S = C \cdot (1+r)^{-n}$

Zahlung * Prozentzahl^-Anzahl Jahre

Bar- und Endwert bei Cashflow

S = S1 + S2 + ...

$S1 = C1 \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^{-n}$

S1 = Endwert * (1/1+Zinssatz)^-Jahr ab Beginn

Rentenbarwertfaktor

Barwert der Rente

$$S = C * \underbrace{\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n * r}}_{\text{Rentenbarwertfaktor}}$$

Rente nach n-Jahren

$R \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = K_n$

C	jährliche Zahlung

Hauskredit: $K_k = \left(K_0 - \frac{n*R}{z}\right)\left(1+\frac{z}{n}\right)^k + \frac{n*R}{z}$

Sparvertrag: $K_m = K * p * \left(\frac{1-p^{n*m}}{1-p}\right)$ $\quad p = 1 + \frac{z}{n}$

Tilgungsplan:

Zinsen: Restschuld Beginn * Prozentsatz

Tilgung: Annuität – Zinsen

Restschuld: Restschuld Jahresbeginn – berechnete Tilgung

<u>Tabelle:</u>

Periode (1-n) | Restschuld Jahresbeginn | Annuität | Zinsen | Tilgung | Restschuld Jahresende

(Sämtliche Nebenrechnungen angeben)

kgV, größter gemeinsamer Teiler (euklidischer Algorithmus)
kgV(a,b) * ggT(a,b) = a*b (wahre Aussage)

$kgV(a,b) = \frac{a*b}{ggT(a,b)}$
alternativ: Primfaktorzerlegung
- ⇨ Anwendung bei großem Zahlenabstand
- ⇨ Primfaktoren berechnen, die gemeinsamen Zahlen multiplizieren

$ggT(a,b) = b * x + c = a$
$c * ? + d = b$
wdh. bis
$d * ? + 0 = c$ → ggT(a,b) = d

Gauß-Algorithmus

Vor Beginn Zeilen vereinfachen (teilen)
Wenn Diagonale (nach Berechnung) nur aus Nullen besteht oder für alle x = 0 rauskommt, ist LGS nicht lösbar.

Lösungsmenge angeben: $\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right\}$

Fakultät und Permutationen

$\prod_{n=1}^{k} n = k!$ → 0! = 1 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n*(n-1)*(n-2)*...*(n-k+1)}{1*2*3*...*k}$

binomischer Satz: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} * b^k$

Vektoren
$\vec{x} \pm \vec{y} = \binom{x_1}{x_2} \pm \binom{y_1}{y_2} = \binom{x_1 \pm y_1}{x_2 \pm y_2}$ Bei Vorfaktor gilt Vorzeichen nur für Vektor (addieren!).
Länge/Betrag des Vektors: $|\vec{X}| = \left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{?}$

Abstand zweier Punkte: $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ dann $|\vec{AB}|$
Vektor von Punkt (Länge vorgegeben): $\vec{P} + \overrightarrow{QR_0}\ (der\ Einheitsvektor) * Länge$
Entgegengesetzte Richtung: Alle Vorzeichen umkehren
Zwei Punkte mit Vektor verbinden: Punkt 1 – Punkt 2

Projektion von Vektor: $\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}.$
Skalarprodukt: $< \vec{x} \circ \vec{y} >=< \binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2} >= (x_1 * y_1) + (x_2 * y_2)$ = Zahl
Winkel: $\frac{Skalar}{Länge} = \frac{\vec{x} * \vec{y}}{|x| * |y|} = \cos(Winkel)$
$Kreuzprodukt: \vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a2 * b3 - a3 * b2 \\ a3 * b1 - a1 * b3 \\ a1 * b2 - a2 * b1 \end{pmatrix}$

$proj_v(u) = \frac{<\vec{u},\vec{v}>}{\|v\|^2} * v$ $\qquad$ $proj_u(v) = \frac{<\vec{u},\vec{v}>}{\|u\|^2} * u$

orthogonal/senkrecht → Skalarprodukt = 0

orthogonales System: Alle Vektoren sind normiert, Skalarprodukt der Vektoren zueinand. ist 0

Einheitsvektor/normieren: $\vec{a_o} = \frac{1}{|\vec{a}|} * \vec{a}$ <=> $\vec{e_v} = \begin{pmatrix} \frac{x}{|\vec{v}|} \\ \frac{y}{|\vec{v}|} \\ \frac{z}{|\vec{v}|} \end{pmatrix}$ (Ergebnis multiplizieren, um Länge von Vektor festzulegen)

Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Punkt, welcher Strecke $\overrightarrow{P_1P_2}$ teilt: $\vec{Q} = \overrightarrow{P_1} + \frac{1}{2} * \overrightarrow{P_1P_2} = \frac{1}{2} * (\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_1})$

Dreieck: Flächeninhalt A = $\frac{1}{2} * | \overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AC} |$ (Kreuzprodukt nutzen, danach ggf. Zahl aus Vektor ausklammern; die ½ mit ggf. ausgekl. Wert und Länge multipl.)

Höhenfußpunkt: Dreieck mittels Projektion teilen

rechten Winkel nachweisen.: Skalarprodukt aller Seiten berechnen, wenn dies 0 ist, dann ist ein rechter Winkel vorhanden

Matrix

<u>Regeln:</u>

$(A^T)^T = A$ $\qquad$ $(A+B)^T = A^T + B^T$ $\qquad$ $(AB)^T = B^T * A^T$ $\qquad$ $B^{-1} * B = \mathbb{I}_{(Matrixgröße)}$

$(A^{-1})^{-1} = A$ $\qquad$ $(A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$ $\qquad$ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

<u>Addition/Subtraktion:</u> [nur bei gleichen Matrizen]

Zahl für Zahl berechnen => $(a \quad b \quad c) \pm (h \quad j \quad k) = (a \pm h \quad b \pm j \quad c \pm k)$

<u>Multiplikation:</u> [nur, wenn Spalte gleich Zeile (ggf. Transponieren) 2x3 * 3x2 = 2x2]

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} h & i \\ j & k \\ l & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a*h+b*j+c*l) & (a*i+b*k+c*m) \\ (d*h+e*j+f*l) & (d*i+e*k+f*m) \end{pmatrix}$$

Falksches Schema:

$$\begin{array}{c|c} \underline{A} \cdot \underline{B} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} \cdot b_{1i} & \sum_{i=1}^n a_{1i} \cdot b_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{1i} \cdot b_{pi} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} \cdot b_{1i} & \sum_{i=1}^n a_{2i} \cdot b_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{2i} \cdot b_{pi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} \cdot b_{1i} & \sum_{i=1}^n a_{mi} \cdot b_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{mi} \cdot b_{pi} \end{pmatrix} \end{array}$$

mit Vektor: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{pmatrix}$

reelle Zahl * Matrix: $x * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx \\ cx & dx \end{pmatrix}$

Transponierte Matrix – Spalten und Zeilen werden vertauscht: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Einheitsmatrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_{(Matrixgröße)}$ $\quad\quad A * A^{-1} = Einheitsmatrix$

<u>Inverse Matrix</u>:

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right)$ es gilt $A * \vec{x} = \vec{b}\ ist\ gleich\ \vec{x} = A^{-1} * \vec{b}$

Umstellung +, - , / , * mit anderen Zeilen, Vorzeichen vertauschen möglich

Berechnung mit Determinante:

$$A^{-1} := \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

$$= \frac{1}{aei + bfg + cdh - bdi - afh - ceg} \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a & b \\ g & h \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} ei - fh & fg - di & dh - eg \\ ch - bi & ai - cg & bg - ah \\ bf - ce & cd - af & ae - bd \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{cccccc} a & b & c & & \\ d & \color{green}{e} & \color{red}{f} & d & e \\ g & \color{red}{h} & \color{green}{i} & g & h \\ & b & c & a & b \\ & e & f & d & e \end{array}}$$

^^transponieren

Inverse bei 2x2-Matrix: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Formel: $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

<u>Determinante</u> (Invertierbarkeit testen):

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \; - \\ a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

$$a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h$$

$$- \; g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b$$ (Invertierbar wenn != 0)

Lineare Optimierung: *Simplex-Algorithmus*
(Umformen der Zielfunktion: $ax_1 + bx_2 = z \rightarrow -ax_1 - bx_2 + z = 0$)
Nebenbedingungen aufschreiben: $cx_1 + dx_2 \leq ? \rightarrow cx_1 + dx_2 + \boldsymbol{u_1} = e$
$ex_1 + fx_2 \leq ? \rightarrow ex_1 + fx_2 + \boldsymbol{u_2} = f$

Simplex-Tableau

	x_1	x_2	u_1	u_2	b_i
u_1	c	d	1	0	e
u_2	e	f	0	1	f
	a	b	0	0	Z

1. Auswahl der Pivot-Spalte: größte Zahl unten (hier: a)
2. Ergebnisspalte durch die Zahlen der Pivot-Spalte teilen. Die kleinste errechnete Zahl gibt die Pivot-Zeile vor (hier e/c). (Achtung: 0 oder negative Zahl in der Pivot-Spalte, keine Berechnung)
3. „Gauß-Schritt“: (multiplizierte) Pivot-Zeile abziehen von der (multiplizierten) vorhergehenden oder folgenden Zeile. Alle Zahlen in Spalte (außer Pivot-Element) müssen 0 werden.
4. Tableau mit neuen Zeilen darunter erweitern, von vorne beginnen
5. Solange, bis in der letzten Zeile keine positive Zahl mehr steht
6. u1, u2… wegstreichen, Funktionen $x_{1,2,\dots}$ berechnen (hier: c* x_1 = e, e durch c teilen)
7. Z ablesen und komplette Ergebnisfunktion mit $x_{1,2,\dots}$ aufstellen
8. Lösung angeben: Z = … für (x_1, x_2) = (..., …)

grafische Lösung

1. alle Restriktionen aufschreiben
2. Nacheinander die x_1 und x_2 Werte der Bedingungen 0 setzen, umstellen
    a. Linien einzeichnen (mit beiden Werten)
3. maximalen Wert für x und y (innerh. der Restriktionen) ablesen
4. In gegebene Zielfunktion einsetzen, Z berechnen

Je nach Aufgabe muss noch die Zielfunktion eingezeichnet und ggf. verschoben werden.

Funktionen (Analysis)

Lineare Funktionen $f(x) = mx + n$

Lineare Funktion aus zwei Punkten berechnen

1. jew. die Punkte in **y** = m**x** + b einsetzen
2. eine Gleichung nach m umstellen, in zweite Gleichung einsetzen
3. zu b umstellen, b in eine der Gleichungen einsetzen
4. zu m umstellen
5. Ergebnis: f(x) = **m** x + **b**

Quadratische Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$

Gebrochen rationale Funktionen

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Defintionslücken gebr. ration. Fkt.:

$Einschränkung\ Def.-Bereich$: $\mathbb{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ $wenn\ durch\ a$ Q(x) = 0 wird (Nullstellenform).
Hebbare Defintionslücke: Nullstellen Zähler und Nenner faktorisieren; wenn oben und unten zwei gleiche Nullstellen, ist Definitionslücke hebbar.

Polstellen/Nullstellen (nur bei gebr. ration. Fkt.):

$$\boxed{\frac{(x-a)^i * (\ldots)}{(x-a)^k * (\ldots)}}$$

1. Fall: a ist nur oben im Zähler → Nullstelle der f(x)
2. Fall: a ist nur unten im Nenner → a ist Pol von f
3. Fall: $\begin{cases} i > k \text{ stetige Fortsetzung, Nullstelle von } g(x) \\ i = k \text{ stetige Fortsetzung von } g(x) \\ i < k \text{ Pol} \end{cases}$

Parabel nach links oder rechts verschieben	$f(x) = (x-d)^2$	d ist die Nullstelle
Parabel nach oben oder unten verschieben	$f(x) = x^2 + c$	
Parabel strecken oder stauchen	$f(x) = ax^2$	

Wenn a > 0 dann nach oben geöffnet, sonst nach unten

Faktorisierte Form $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Ausmulitplizieren für die Normalenform (3. Binom. Formel nutzen)

Gleichung in faktorisierte Form bringen:

- ausklammern
- ggf. pq-Formel nutzen oder Nullstellen berechnen (Polynomdivision)
- ausgeklammerten Faktor schreiben (hier c), so viele Klammern wie Nullstellen mit getauschtem Vorzeichen schreiben, danach folgt (nullstellenlose) Rest

  $c * (x - x_1) * (x - x_2) * \cdots * (x - x_n)$
- Bonus: Die Faktoren als Primzahlen schreiben
- Ziel: Zahlen sind Primzahlen, x hat nur x^1 als Potenz

Scheitelpunktform: $f(x) = a(x-d)^2 + e$ Scheitelpunkt: $S(d|e)$ (Hoch- o. Tiefp.)

Scheitelpunkt berechnen:

a. Funktion ableiten
b. x-Koordinate des Scheitelpunktes berechnen durch Nullsetzen der 1. Ableitung
c. y-Koordinate des Scheitelpunktes berechnen durch Einsetzen des x-Wertes in f(x)

Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = y$ (Funktion nach x umstellen, x und y einfach tauschen)

1. Definitionsbereich

Alle Zahlen, welche für x verwendet werden können. Wenn kein Bruch/Wurzel: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

<u>Definitionslücken:</u>

Bruch => Bereiche ausschließen (Nenner darf nicht 0 werden); bei x² zwei Zahlen!

$f_1(x) = \sqrt{x}$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

Wurzel: $f_2(x) = \sqrt{x+1}$ $\quad \mathbb{D} = \{x \mid x > -1\}$ Wenn Wurzelexponent ungerade, sind alle reellen Zahlen erlaubt, bei $\sqrt{x^2}$ auch neg. Werte erlaubt.

Zahlen ausschließen: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+ \ (mit\ 0)\ oder\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{a, -b\}$

1.1 Wertebereich

$W_f = f([a,b]) = [a,b)$ ist Bereich, den der y-Wert annehmen kann, also f(x)
Bestimmung: Alle möglichen x-Werte einsetzen, Menge der erhaltenen y-Werte angeben.

lineare Funktion: $W_f = \mathbb{R}$, außer wenn Def.-B. vorgegeben. Dann einsetzen.

- $W_f = [y_s; \infty[$, wenn das Vorzeichen von x^2 **positiv** ist
- $W_f =]-\infty; y_s]$, wenn das Vorzeichen von x^2 **negativ** ist

quadratische Funktion: Dabei ist y_s die y-Koordinate des Scheitelpunkts $S(x_s|y_s)$. (s.o.)

2. Symmetrie

Testen (beliebigen Wert einsetzen):
$f(-x) = f(x)$ → **achsen**symmetrisch
$f(-x) = -f(x)$ → **punkt**symmetrisch

3. Nullstellen (Berührung x-Achse)

Max. so viele Nullstellen, wie höchster Grad.
Satz von Vieta: ganzzahlige Nullstellen sind immer Teiler von a_0 (letzte Zahl, absolutes Glied).
Definitionsbereich beachten!
Beim Einsetzen in *f = (x + b) (x - b)* die Vorzeichen der Werte ändern!

- Funktion gleich null setzen und nach x auflösen (pq oder quadrat. Ergänz.)
  Wenn x(a+b) vorkommt, ist 0 eine Nullstelle
- quadrat. Ergänzung: Funktion = 0 setzen, Vereinfachen (ausklammern), Konstante rüber, $x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2$ ergänzen (beide Seiten), ausr., weiter vereinfachen

- Nullstellen via Polynomdiv.: Erste Nullstelle raten (1,2,3 testen, so dass = 0),
  Polynom durch (**x**-Nullstelle) teilen, Ergebnis = 0 setzen
- Horner-Schema (siehe Punkt 9.4 S. 11)
- Satz von Vieta

$x^2 + p \cdot x + q = 0$

1. Normalenform ($x^2 + px + q = 0$)

$x_1 \cdot x_2 = q$

2. Teiler von q suchen, also Faktoren bestimmen, die x1 · x2 = q erfüllen

$x_1 + x_2 = -p$

3. Faktoren bestimmen, die gleichzeitig auch x1 + x2 = − p erfüllen

- Nullproduktsatz (faktorisierte Form, für jedes x nacheinander 0 f

3.2 Substitutionsverfahren

Bei ähnlichem Funktionsaufbau wie Standardform (pq), jedoch höherem Grad:
Z = x^y => quadratische Gl. lösen (mit eingesetztem Z, also Exponent max. ^2; z. B. pq Formel anwenden), statt Z die berechneten Zahlen einsetzen und lösen

4. Auf-/Ableitungsregeln

$\boldsymbol{f(x) = x^n}$	$\boldsymbol{f'(x) = n * x^{n-1}}$
$\boldsymbol{f(x) = c}$	$f'(x) = 0$
$\boldsymbol{f(x) = x}$	$f'(x) = 1$
$\boldsymbol{f(x) = u(x) \pm v(x)}$	$f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
$\boldsymbol{f(x) = u(x) * v(x)}$	$f'(x) = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)$
$\boldsymbol{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}}$	$f'(x) = \frac{u'(x) * v(x) - u(x) * v'(x)}{v(x)^2\ (nicht\ ausmultipl.)}$
$\boldsymbol{f(x) = u(v(x))}$	$f'(x) = u'\big(v(x)\big) * v'(x)$
$\boldsymbol{f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}}$	$f'(x) = -n * x^{-n-1} = \frac{-n}{x^{(n+1)}}$
$\boldsymbol{f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}}$	$f'(x) = \frac{1}{n} * x^{\frac{1}{n}-1}$
$\boldsymbol{f(x) = e^x}$	$f'(x) = e^x$
$\boldsymbol{f(x) = e^{u(x)}}$	$f'(x) = u'(x) * e^{u(x)}$
$\boldsymbol{f(x) = \ln(e^x)}$	$f'(x) = x$
$\boldsymbol{f(x) = a^x = e^{x * ln\,(a)}}$	$f'(x) = \ln(a) * a^x$
$\boldsymbol{f(x) = a^{ux}}$	$f'(x) = ln(a) * u' * a^{ux}$
$\boldsymbol{f(x) = \ln(x)}$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$\boldsymbol{f(x) = log_a(x)}$	$f'(x) = \frac{1}{x} * log_a(e)$
$\boldsymbol{f(x) = log_a(u(x))}$	$f'(x) = \frac{1}{u(x)} * u'(x) * log_a(e)$

4.1 Tangentengleichung aufstellen

$t(x) = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$ a wird gegeben, einsetzen und ausrechnen

Endform: g(x) = ax $\pm b$

5. Monotonie

f´ und Nullstellen der 2. Ableitung (also Extremstellen) ausrechnen. Dann Nullstellen von f´ in f´´ einsetzen.
Wert von f´´ *positiv* = Tiefpunkt (links davon fallend, rechts davon steigend)
Wert von f´´ *negativ* = Hochpunkt (links davon steigend, rechts davon fallend)
Wert von f´´ *null* = in f´´´ einsetzen, wenn 0 dann keine Aussage möglich. Sonst Terassenpunkt (links und rechts davon gleiche Monotonie).

Intervall angeben:

Schreibweise (I)	Schreibweise (II)	Mengenschreibweise	Typ
$[a,b]$	$[a,b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	geschlossen
$]a,b[$	(a,b)	$\{x \mid a < x < b\}$	offen
$[a,b[$	$[a,b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	halboffen / rechtsoffen
$]a,b]$	$(a,b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	halboffen / linksoffen

∞

Punkt berechnen: x in Ausgangsfunktion einsetzen für y-Wert

Wendepunkt

f´´(x) = 0 setzen, x-Wert für Wendepunkt erhalten
Wenn f´´´(Ergebnis) $\neq 0$ dann Wendepunkt ok
$P_w = (Ergebnis \mid Ergebnis\ in\ f(x)\ eingesetzt)$

6. Inverse Funktion

f^{-1} → f(x) muss dafür bijektiv (umkehrbar) sein: f(x1) = f(x2) => x1 = x2
f(x) nach x auflösen (f^{-1} = …)

8. Asymptote

(vollständig ausmulitplizierte) Ursprungsfunktion nutzen

Typ	Voraussetzung	Berechnung Asymptote
senkrechte Asymptote	Nullstelle des Nenners (die Definitionslücke)	Nenner 0 setzen, der Rest ist die Geradengleichung
waagrechte Asymptote	gr. Zählergrad = gr. Nennergrad (kann jew. auch 0 sein)	$y = \frac{a_n}{b_n}$ a(n)/b(n) ist Koeffizient der höchsten Potenz (Zähler/Nenner)
	gr. Zählergrad < gr. Nennergrad	x-Achse (y = 0) ist Asymptote
schiefe Asymptote	gr. Zählergrad = gr. Nennergrad + 1	Polynomdivision durchführen, für x $\pm\infty$ einsetzen, der Rest ist gesuchte Gleichung
asymptotische Kurve	gr. Zählergrad > gr. Nennergrad + 1	

Antwort: Graph nährt sich für $x \to \pm\infty$ asymtotisch der (…) Geraden y = … an.

9.1 Polynom

Geradenform (Polynom 1. Grades): $f(x) = a_1 x^1 + a_0$
Steigung: $a_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

9.2 Polynomdivision (z. B. für Nullstellen)

Vorbereitung: Polynome nach fallenden Potenzen ordnen (bei – Vorzeichen tauschen)
Teilen durch **(**x **–** [geratene] Nullstelle**)** oder durch Polynom Nenner

Tipps: bei fehlenden Exponenten $0 * x^{exp}$ schreiben; wenn nicht abziehbar, beide Werte (mit -) mitnehmen, ordnen; größerer Vorfaktor durch $\frac{kl.\ untere\ Zahl}{gr.\ obere\ Zahl}$ behebbar, Vorfaktor durch $\frac{1}{Vorfaktor}$ entfernbar

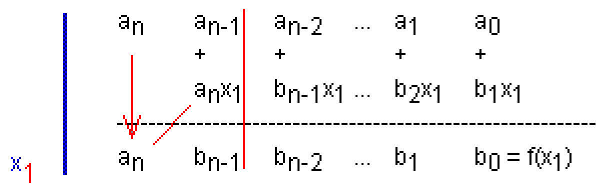
Ergebnis + $\frac{Rest\ (wenn\ Polynom\ unten\ kleineren\ Grad\ als\ oben\ hat)}{genutzter\ Divisor}$

9.3 Polynom vereinfachen

Bei Standardform (x² + ax + b = 0) pq-Formel anwenden, ansonsten Substitutionsverfahren, quadrat. Ergänzung, Faktorisieren (gemeins. Zahl ausklammern) oder binomische Formeln. Dann sind ggf. weitere Schritte möglich.

9.4 Horner-Schema (für Nullstellen, Polynomdivision, Ableitungen)

Voraussetzung: Polynom geordnet und möglichst vereinfacht, alle Grade von 0 bis n (max Grad) müssen vorhanden sein (ggf. fehlende hinzufügen mit Koeffizient 0).



1. geg. Koeffizienten in erste Zeile übernehmen
2. erste Nullstelle selbst herausfinden (Bedingung: f(b) = 0)
3. ersten Wert nach unten übernehmen
4. Nullstelle mit diesem Wert multiplizieren, oben hinschreiben
5. Zeile zusammenaddieren
6.1 alle Zahlen berechnen
6.2 Polynom in unterer Zeile ablesen
7. Polynom gleich 0 setzen (dann pq-Formel etc.)
8. ggf. mit berechneten Werten weitermachen (wenn letzte Zahl = 0, dann geratene Nullstelle korrekt => Weiterrechnen erlaubt)
8. Lösung angeben: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{...} \end{pmatrix} | x_{...} \epsilon \mathbb{R} \right\}$ oder

Polynomgleichung: f(x) = (Rest) (x **–** Nullstelle)

10. Extremstellen

f´ (x) = 0 (Nullstelle der 1. Ableitung) ist die Extremstelle (x-Wert).
Wenn f´´ existiert, weitere Bestimmung:

f´´ (x) > 0 lokales Minimum
f´´ (x) < 0 lokales Maximum
f´´(x) = 0 keine Extremstelle, sondern Wende-/Sattelpunkt

$P_{max} = (Ergebnis \mid in\ f(x)\ eingesetzt)$

Bestimmung Extremstellen mittels Monotonieverhalten:
letzte nicht verschwindende Ableitung von gerader Ordnung (4.,6.,8…) => **lokale Extremstelle**
letzte nicht verschwindende Ableitung von gerader Ordnung **und** positiv => **lokales Minimum**
letzte nicht verschwindende Ableitung von gerader Ordnung **und** negativ => **lokales Maximum**
letzte nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung => **Sattelpunkt** (Sonderfall von Wendepunkt; ist kein Extrempunkt, sondern waagerechte „Treppenstufe“)

11. Grenzwert

Verhalten von |x| -> ∞ ist wie das Verhalten von $a_n x^n$ (Leitterm)

12 Funktionen mit zwei Variablen

1. Partielle Ableitungen (anderer Wert bleibt unverändert, wenn dieser nicht alleine steht)

$f_x(x;\ y) = \frac{\partial f}{\partial x}\ Abl.nach\ x$ $\qquad$ $f_y(x;\ y) = \frac{\partial f}{\partial y}\ Abl.nach\ y$

2. Partielle Ableitungen

$f_{xx}(x;\ y) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ $\qquad$ $f_{yy}(x;\ y) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ $\qquad$ $f_{yx}(x;\ y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $\qquad$ $f_{xy}(x;\ y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

12.2 Extremstellen zwei Variablen

(1) 1. Partiellen Ableitungen nullsetzen und nach x/y umstellen.

(2) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\right) * \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ hier x und y dann einsetzen

(3) $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\begin{cases} > 0\ Minimum \\ < 0\ Maximum \end{cases}$

Extremstellen mit Nebenbedingungen (Es gibt eine zweite Funktion g(x))

Lagrangesche Regeln

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda * \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ 2. & \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda * \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ 3. & g(x) = \cdots = 0 \end{array}}$$

(1) Umstellen von 1. und 2. nach λ oder e
(2) Gleichsetzen und nach x oder y auflösen.
(3) Einsetzen in 3.
(4) Nach fehlender Konstante auflösen.
(5) Nachbarpunkt finden, indem man sich Zahl für x ausdenkt und diese in g(x) einsetzt.
(6) Anschließend Punkte in f(x) einsetzen und ausrechnen. Wenn der Nachbarpunkt größer ist →Minimum. Wenn der Nachbarpunkt kleiner ist → Maximum.

Integrale

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Achtung: Nullstellen beachten, da sonst möglicherweise der Flächeninhalt unterhalb der X-Achse subtrahiert wird!

Folgen

- arithmetische Folgen (Änderung, um gleiche Addition/Subtraktion)
- geometrische Folgen (Änderung, um gleiche Multiplikation)
- harmonische Folgen (Änderung um 1)
- alternierend (positiv, negativ, positiv, negativ)

Nullfolge → Grenzwert geht gegen null
Grenzwertbestimmung durch ausklammern von „n“ bei Brüchen

Reihen

sind Summenfolgen.

Geometrische Summenformel:

$S_k = \sum_{n=0}^{k} q^n = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$

bei nicht Exponenten:

$\sum_{n=0}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}$